

# AULA 4 (cont.): Método de Máxima Verossimilhança

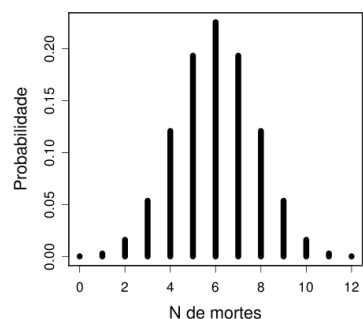
## Conceitos

1. Método da Máxima Verossimilhança
2. Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLEs) e suas propriedades
3. Cálculo analítico e computacional dos MLEs
4. Curva e Superfície de Verossimilhança
5. Intervalos e regiões de plausibilidade
6. Perfis de verossimilhança

## Probabilidade x Verossimilhança

### PARÂMETROS FIXOS

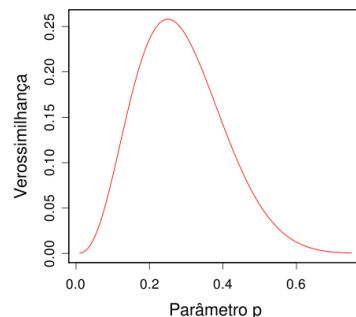
Binomial,  $N=12$ ,  $p=0,5$



- Funções de uma variável aleatória
- Parâmetros conhecidos
- Somam (ou integram) um
- Podem ser discretas ou contínuas

### DADOS FIXOS

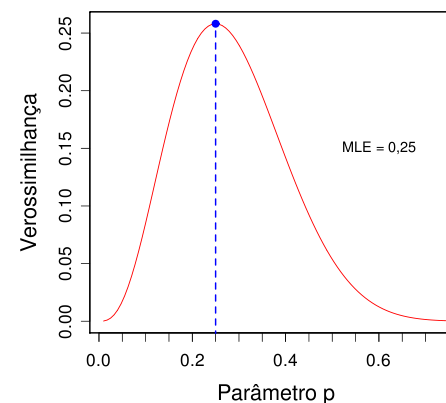
Binomial,  $N=12$ ,  $x=3$



- Funções dos parâmetros
- Dados conhecidos
- Não precisam ter integral um
- São contínuas

## Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLEs)

Binomial,  $N=12$ ,  $x=3$



O valor de parâmetro do modelo que atribui a maior probabilidade a um conjunto de dados.

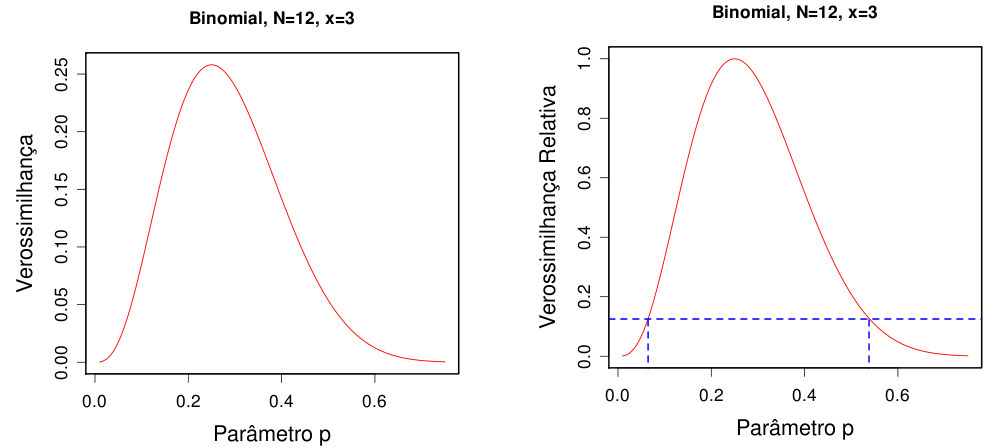
OU

O valor mais plausível do parâmetro, condicionado aos dados

# Propriedades dos MLEs

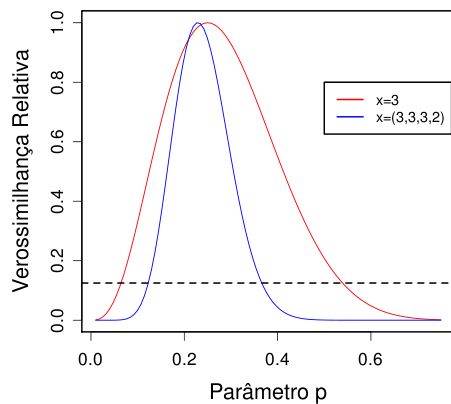
- Para amostras grandes ( $n \rightarrow \infty$ ):
  - **Consistência:** convergem em probabilidade para o valor do parâmetro: não são viciados.
  - **Eficiência assintótica:** atingem a menor variância entre os estimadores não-viciados.
  - **Normalidade assintótica:** tendem a uma distribuição normal (Gaussiana).
- Para qualquer amostra:
  - **Invariância:** transformações monotônicas de MLEs também são MLEs.

# Intervalo de Plausibilidade



Regra canônica para intervalo de plausibilidade: contem os valores do parâmetro que resultam em razão de verossimilhança < 1/8 (modelos até 8 vezes menos plausíveis do que o obtido com o mle)

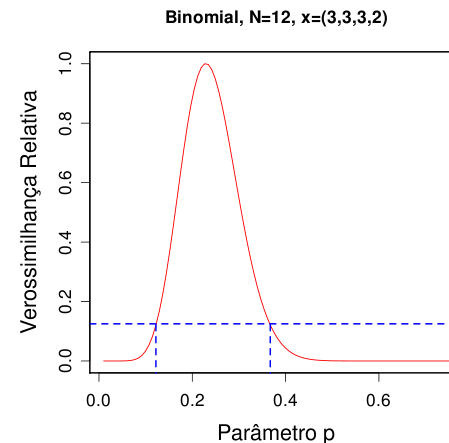
# Mais de uma observação: mais precisão



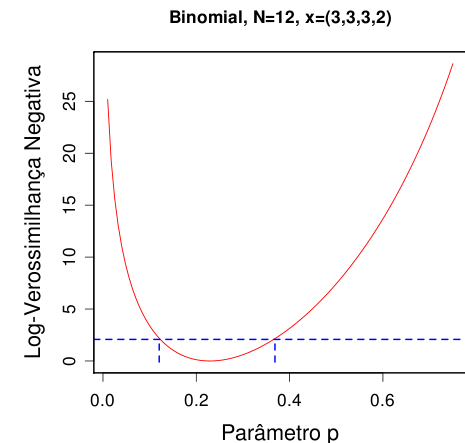
$$L = f(p|x=3) \times f(p|x=3) \times f(p|x=3) \times f(p|x=2)$$

# Função de Log-Verossimilhança Negativa

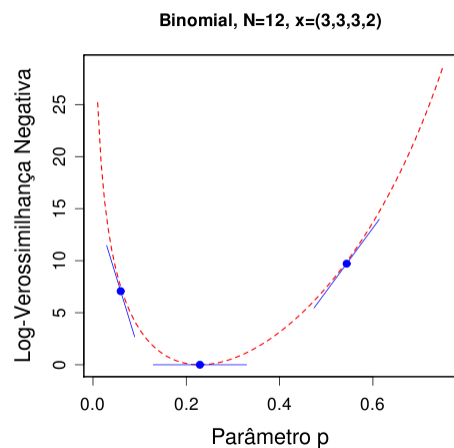
Verossimilhança Relativa



Log-Verossimilhança Relativa



## Cálculo da MLE



Os MLEs são os valores dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança, portanto que minimizam a função de log-verossimilhança negativa.

## Alguns MLEs Deduzidos Analiticamente

Distribuição	Parâmetro	MLE
Binomial	$p$	$\frac{x}{N}$
Poisson	$\lambda$	$\frac{\sum x_i}{n}$
Normal	$\mu$	$\frac{\sum x_i}{n}$
Normal	$\sigma^2$	$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ ← E não n-1

## Minimização Computacional no R

### Dados:

```
> euplant = c(5,23,23,17,0,4,1,0,0,1,0,2,26,65,34,14,18,13,19,7)
```

### Crie uma função de verossimilhança:

```
> nvl = function(lambda){
  -sum( dpois(euplant, lambda, log = TRUE) )
}
```

### Aplique o minimizador à função:

```
> euplant.mle = mle2( nvl, start = list( lambda = 10 ) )
```

## Minimização Computacional no R

```
> logLik(euplant.mle)
```

```
'log Lik.' -198.6271 (df=1)
```

```
> coef(euplant.mle)
```

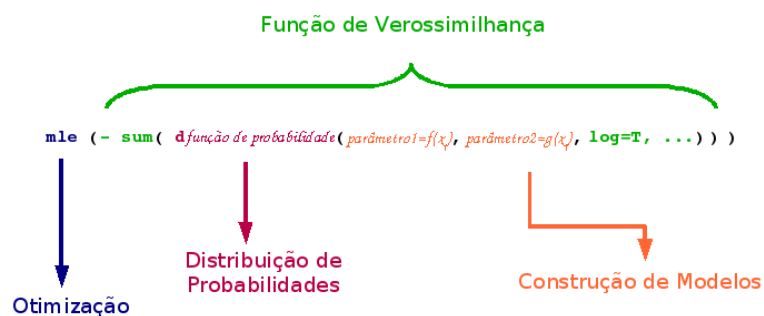
```
lambda
```

```
13.60001
```

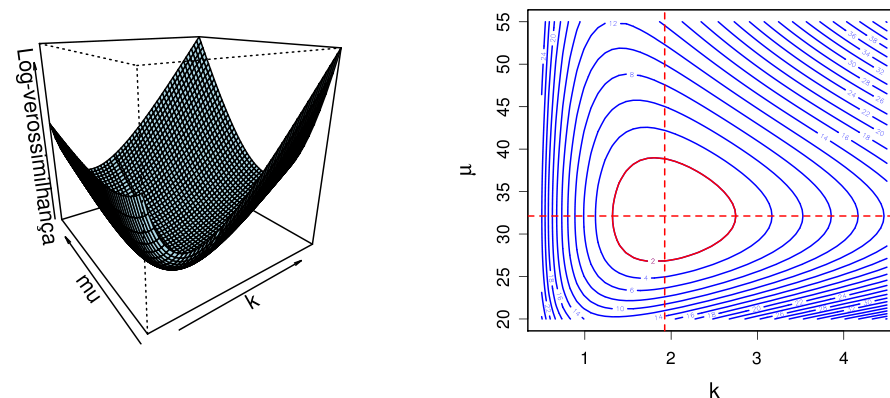
```
> mean(euplant)
```

```
[1] 13.6
```

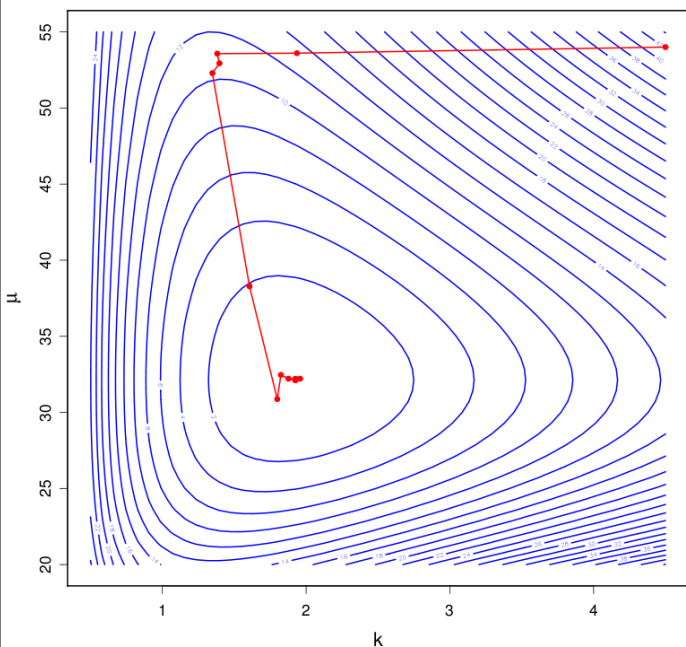
# Ói Nós Aqui!



# Superfície de Verossimilhança

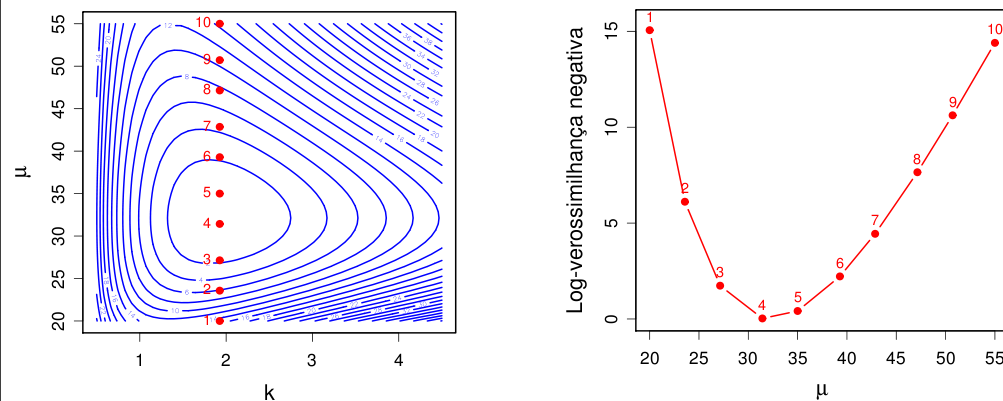


Superfície da função de verossimilhança de uma binomial negativa ajustada a número de árvores de *Copaifera langsdorffii* em 64 parcelas na Estação Ecológica de Assis.

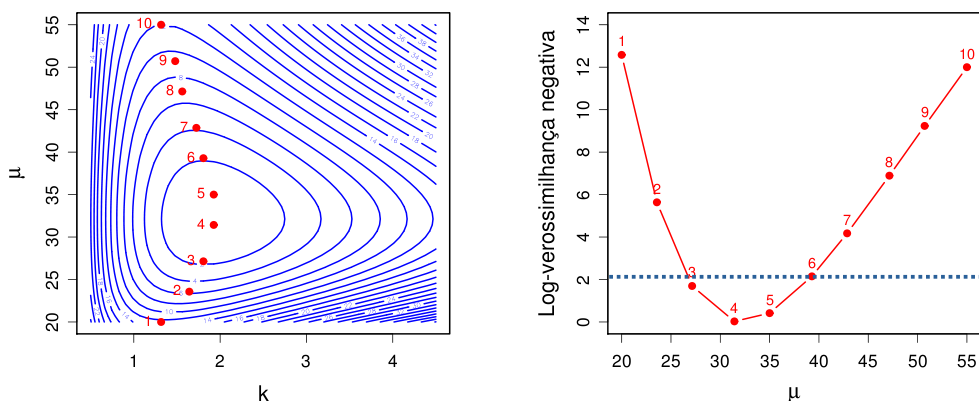


## Otimização Computacional

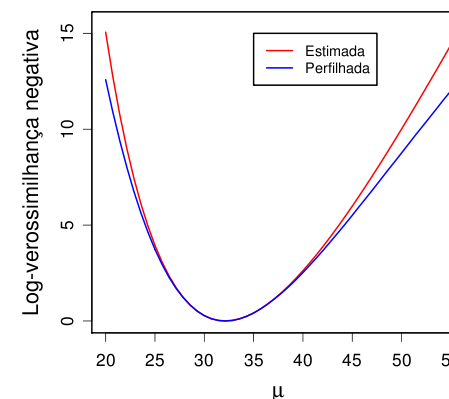
# Verossimilhança Estimada



## Verossimilhança Perfilhada



## Verossimilhança Estimada x Perfilhada



Moral da história: prefira a perfilhada. Este é o padrão no R (função profile)

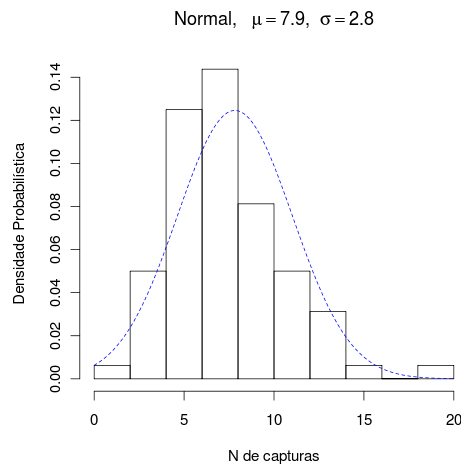
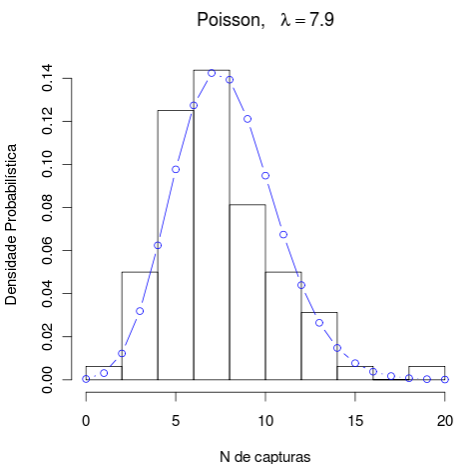
## RESUMO

- Uma vez obtidos os dados, cada modelo terá uma verossimilhança máxima.
- Os valores dos parâmetros que maximizam a verossimilhança são as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros (MLEs).
- MLEs tem várias propriedades esperadas para um bom estimador.
- O estudo da curva de verossimilhança é o principal diagnóstico dos MLEs.

## RESUMO

- Para modelos com mais de um parâmetro:
  - Temos superfícies de verossimilhança e regiões de plausibilidade.
  - Estimativas analíticas dos MLEs são bem mais raras e difíceis.
  - As curvas e intervalos de verossimilhança são aproximados por perfis de um espaço multidimensional.

## Para onde vamos: Seleção de Modelos



## Selecione o mais plausível

MODELO	Parâmetros	LL
Normal	$\mu=7,9 \sigma=2,8$	206,1
Poisson	$\lambda=7,9$	203,7

**Razão de verossimilhanças:  $206,1 - 203,7 = 3,6$**

## Leituras

Verossimilhança e Máxima Verossimilhança 2009,  
Batista, J.L.F.

Bolker, B. (2008). Ecological Models and Data in R.  
Princeton, Princeton University Press. (cap.8)

The Concept of Likelihood 1992. In: Edwards, A.W.F.,  
1992 Likelihood, cap.2, p.8-24. Baltimore: John  
Hopkins University Press.

Hobbs, N.T. & Hilborn, R. (2006). Alternatives to  
statistical hypothesis testing in ecology: A guide to  
self-teaching. Ecological Applications: 16(1): 5-19.