

BIE5781

Aula 3 (cont.)

# Distribuições de probabilidade contínuas: Distribuições para tempos

## CONCEITOS

- Limites contínuos de variáveis discretas
- Distribuição exponencial
- Distribuição gama
- Distribuição Weibull
- Função de risco e memória em distribuições de tempo

## Pequeno Bestiário de Distribuições Contínuas de Probabilidade



Aldrovandi, 1642, Monstrorum historia  
<https://www.biodiversitylibrary.org/item/250678>

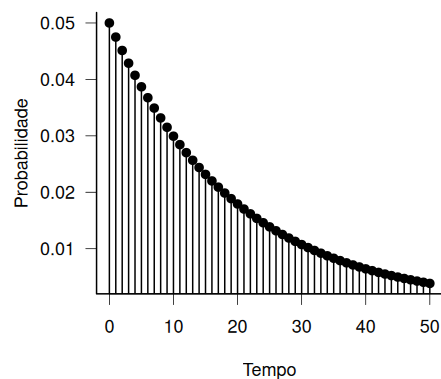
## Recapitulando: Distribuição Geométrica

Número de fracassos até o primeiro sucesso em uma série de experimentos de Bernoulli

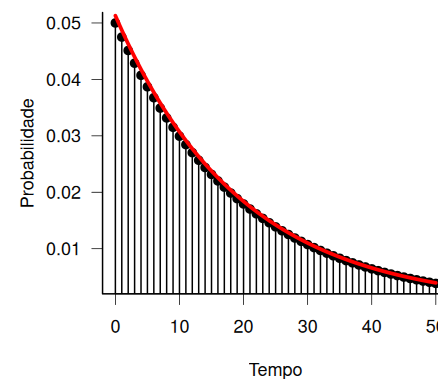
Exemplos:

- Sobreviventes de uma coorte após cada ano
- Passagem para um estágio fenológico ou reprodutivo a cada mês
- ...

## Distribuição Geométrica



## Distribuição Exponencial

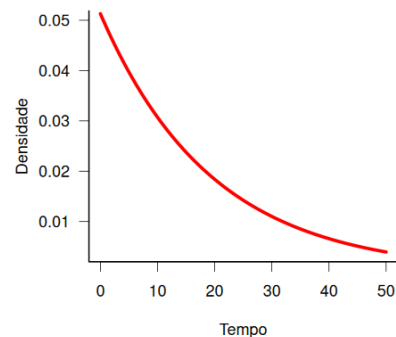


Limite contínuo da variável geométrica

## Distribuição Exponencial

Tempo até a ocorrência de um evento dada uma taxa instântanea de ocorrência constante.

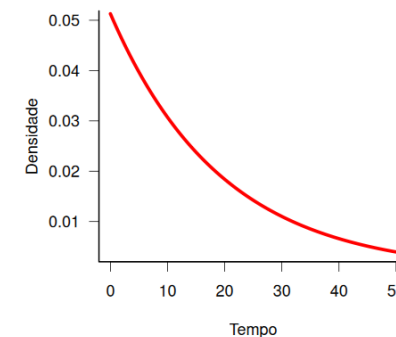
(isto é, dado um tempo médio constante para a ocorrência do evento)



## Distribuição Exponencial

Exemplos:

- Vida útil de máquinas
- Curvas de sobrevivência
- Decomposição de um material
- ... todos a uma taxa constante de "falha"



# Distribuição Exponencial

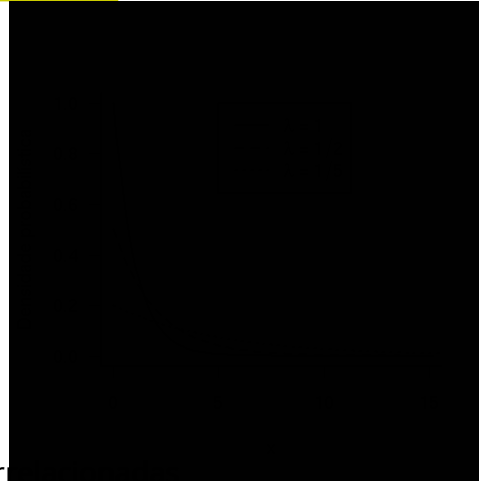
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$\lambda$  = taxa de decaimento,  
desaparecimento ou  
mortalidade (real positivo)

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$VAR[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Note que esperança e variância são cor



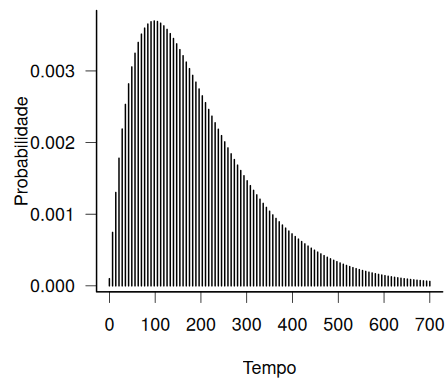
# Recapitulando: Distribuição Binomial Negativa

Número de fracassos até o N sucessos em  
uma série de experimentos de Bernoulli.

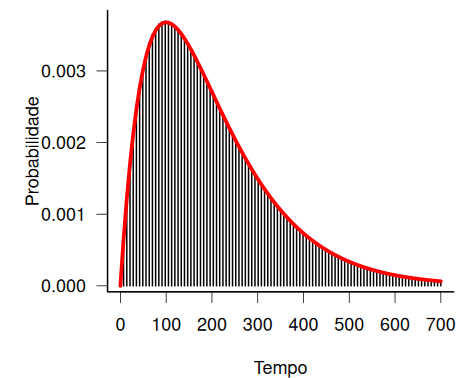
Exemplos:

- Número de tentativas para se obter duas caras
- Em biologia mais usada como modelo heurístico para eventos agregados no tempo ou espaço

# Distribuição Binomial Negativa



# Distribuição Gama

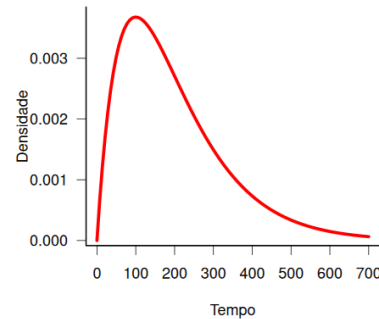


Limite contínuo da variável binomial negativa

## Distribuição Gama

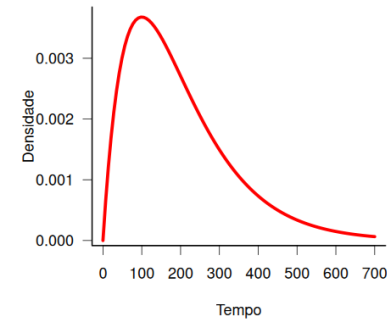
Tempo até a ocorrência de um certo número de eventos dada uma taxa instântanea de ocorrência constante.

Generalização da distribuição exponencial para tempo até n eventos.



Exemplos:

- Tempo até um predador encontrar n presas
- Idade ao ter o n-ésimo filho
- ... todos a uma taxa constante de "falha"
- Fenomenologicamente: medidas de valor positivo e com distribuição assimétrica .



## Distribuição Gama

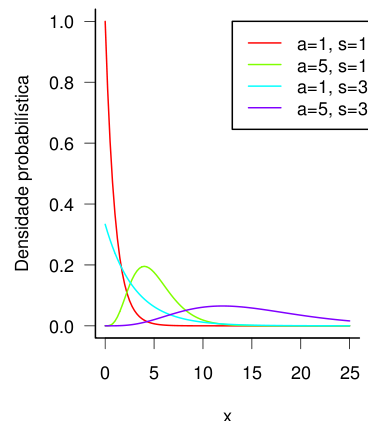
$$f(x) = \frac{1}{s^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/s}$$

**a** = forma (real positivo)

**s** = escala ou **r** = 1/s = taxa (real positivo)

$$E[X] = as$$

$$VAR[X] = as^2$$



## Distribuições Weibull

Tempo até a ocorrência do primeiro entre um conjunto de eventos independentes.

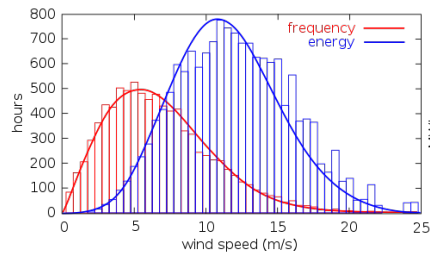
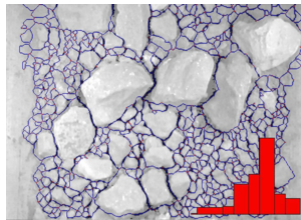
Exemplos:

- Tempo até que uma das peças essenciais de uma máquina pare de funcionar
- Tempo de vida com risco de morte dependente da idade.

# Distribuições Weibull

Fenomenologicamente usada para descrever distribuições de valores positivos com graus variados de assimetria:

- Tamanhos granulométricos
- Velocidade de ventos



# Distribuição Weibull

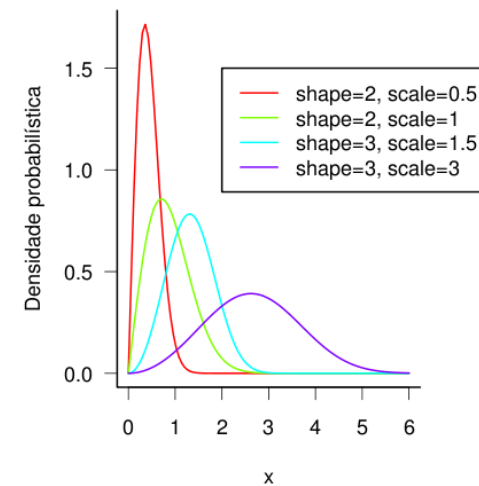
$$f(x) = \frac{a}{s} \left(\frac{x}{s}\right)^{a-1} e^{-(x/s)^a}$$

**a** = forma (real)

**s** = escala (real)

$$E[X] = s\Gamma(1+1/a)$$

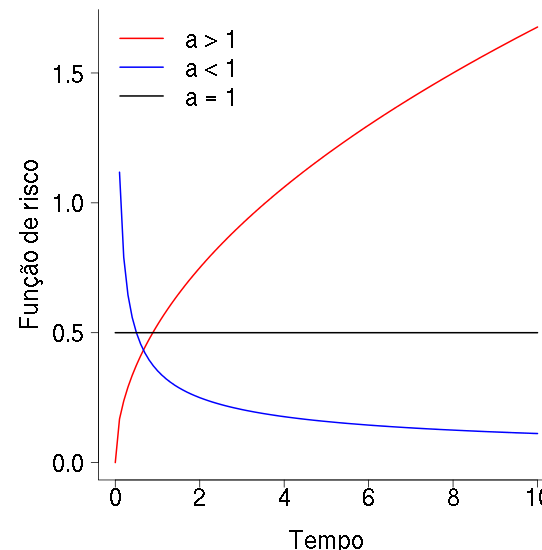
$$VAR[X] = s^2\Gamma(1+2/a) - (E[X])^2$$



# Processos com e sem memória



# Função de Risco



$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

$$h_{\text{exp}}(x) = \lambda$$

$$h_W(x) = \frac{a}{s} \left(\frac{x}{s}\right)^{a-1}$$

## RESUMINDO ...

- Muitas distribuições discretas têm uma correspondente contínua.
- A distribuição exponencial é o limite contínuo da distribuição geométrica
- A distribuição gama é um limite contínuo da distribuição binomial negativa

## RESUMINDO ...

- A distribuição exponencial é o modelo probabilístico mais simples para distribuições de tempo contínuo
- A exponencial tem função de risco constante (processo sem memória)

## RESUMINDO ...

- A distribuições Weibull e gama são modelos mais flexíveis para distribuições de tempo contínuo
- As funções de risco da Weibull e Gama podem ser funções do tempo já decorrido (podem ter memória).
- A exponencial é um caso especial da Weibull e da Gama

## Leituras Recomendadas

- Bolker, B. (2008). Ecological Models and Data in R. Princeton, Princeton University Press. (Cap.4)
- Otto, S. P. & Day, T. (2007). A biologist's guide to mathematical modelling in ecology and evolution. Princeton, Princeton University Press. (Primer 3)
- Lindsey J. K. (2004) Introduction to applied statistics - a modelling approach. 2nd Ed, Oxford, Oxford University Press. (Cap.4)