

# Distribuições de Probabilidade

## Conceitos Básicos

Paulo Inácio K.L. Prado e João L.F. Batista

BIE-5781 Modelagem Estatística em Ecologia e Recursos Naturais

Pós-Graduação em Ecologia – USP, Novembro de 2020

### Conceitos

- ▶ Variável aleatória
- ▶ Distribuição de probabilidade
- ▶ Função de densidade probabilística
- ▶ Função de distribuição ou probabilidade acumulada
- ▶ Esperança e variância das distribuições de probabilidade

# Uma teoria da variabilidade

Variável aleatória:

Qualquer resultado que possa variar entre observações.



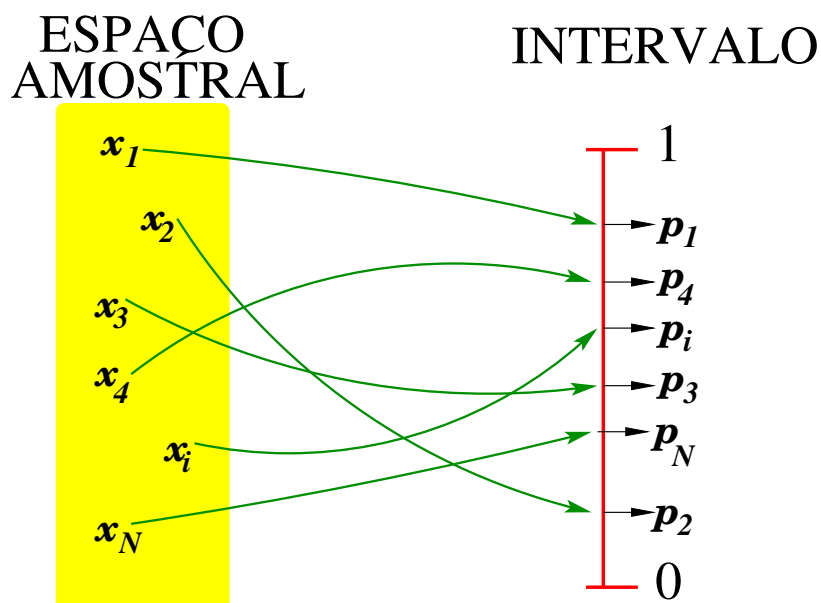
Exemplo:

## Distribuição de Probabilidades

Prot Função

Uma *Distribuição de Probabilidades* é uma função matemática.

Esquema



# Classes de Variáveis Quantitativas

## Variáveis Discretas

Os valores *possíveis* estão no conjunto dos **NÚMEROS INTEIROS**.

O tamanho do conjunto é:

- ▶ finito se for um sub-conjunto dos números inteiros.
- ▶ infinito contável se todos números inteiros.

Variáveis obtidas por:

- ▶ enumeração,
- ▶ contagem.

# Classes de Variáveis Quantitativas

## Variáveis Contínuas

Os valores *possíveis* estão no conjunto dos **NÚMEROS REAIS**.

O tamanho do conjunto dos valores possíveis é sempre infinito incomensurável.

Variáveis obtidas por:

- ▶ medição.

# Espaço amostral

## Definição

O *conjunto* de valores possíveis de uma variável aleatória.

## Escopo

Esta definição vale para variáveis discretas e contínuas

## Exemplos de Espaços Amostrais

### Discretas

- ▶ Número de caras no lançamento de duas moedas:

$$S = \{0, 1, 2\}$$

- ▶ Número de plântulas numa parcela:

$$S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

### Contínuas

- ▶ Peso de peixe:  $S = \{w\} \mid w \in [0, +\infty)$
- ▶ Diâmetro de árvores em levantamento com diâmetro mínimo de medição de 5 *cm*:

$$S = \{d\} \mid d \in [5, +\infty)$$

# Distribuição de Probabilidades

## Função Matemática

Para uma variável discreta,

a *Distribuição de Probabilidades* associa:

- ▶ cada (e todos) elemento do *Espaço Amostral*
- ▶ com um número real no intervalo  $[0, 1]$ .

## Probabilidade

Para uma variável discreta,

a *Distribuição de Probabilidades* associa:

- ▶ cada valor *possível* da variável
- ▶ com uma *probabilidade* desse valor ser observado.

## Exemplo de Distribuição de Probabilidades

### Situação

Uma ninhada de 2 filhotes de sagui.

Cada filhote tem chance de 50% de ser fêmea.

### Variável Discreta

$X$  = número de fêmeas na ninhada.

### Espaço Amostral

$x \in S = \{0, 1, 2\}$  ou  $x = 0, 1, 2$

# Exemplo de Distribuição de Probabilidades

## Função

- ▶ Função de densidade probabilística ou
- ▶ Função de massa probabilística (Rice, 1995):

$$f(x) = P(X = x) \quad x = 0, 1, 2$$

## Probabilidades

$$f(0) = P(X = 0) = 0,25$$

$$f(1) = P(X = 1) = 0,50$$

$$f(2) = P(X = 2) = 0,25$$

## Função de *Densidade* Probabilística

### Função

Função de densidade probabilística:

$$f(x) = P(X = x), \quad x \in S \text{ (espaço amostral)}$$

### Propriedades

Valores no intervalo  $[0, 1]$ :

$$0 \leq f(x) \leq 1 \text{ para } x \in S.$$

A soma das probabilidades é igual a 1:

$$\sum_{x \in S} f(x) = 1.$$

# A Soma das Probabilidades no Espaço Amostral

## Exemplo da Ninhada

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2} = 0,50$$

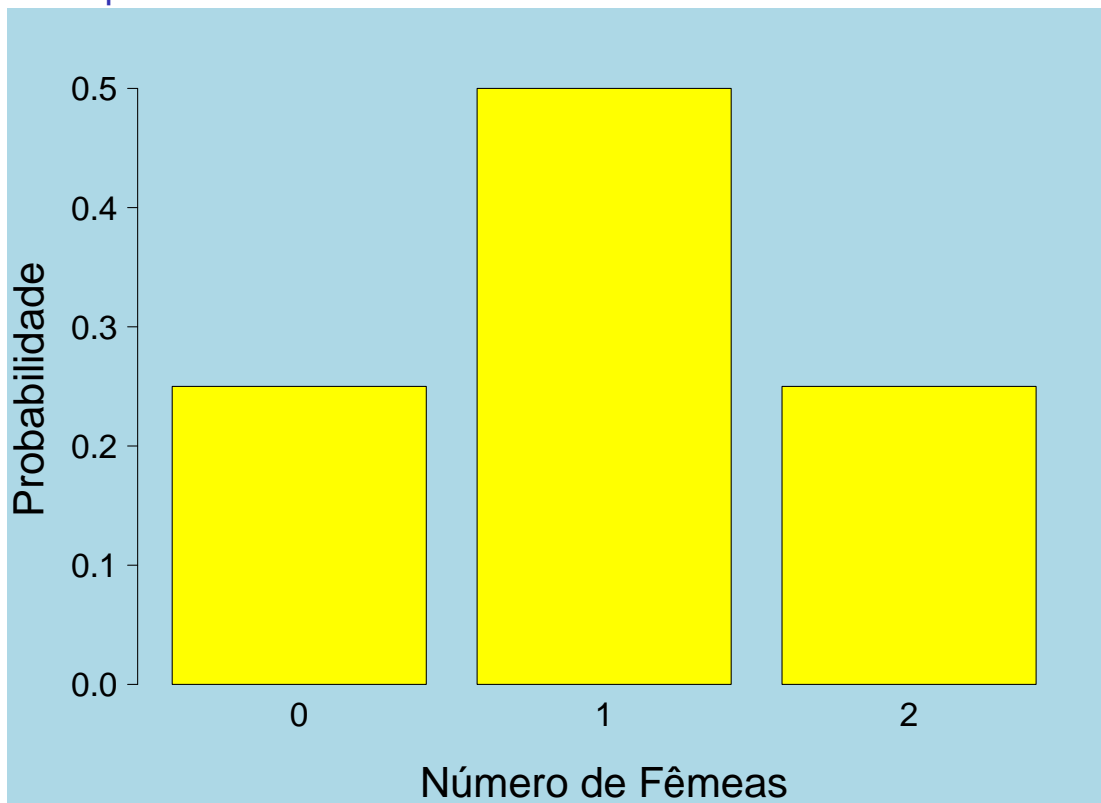
$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0,25$$

---

$$\sum_{x=0}^2 f(x) = (1/4) + (1/2) + (1/4) = 1$$

## Gráfico da Função de *Densidade* Probabilística

### Exemplo da Ninhada



# Função de Distribuição Acumulada

## Outra Função

Outra forma de representar a distribuição de probabilidades é a Função de Distribuição ou probabilidade acumulada

- ▶ A Função de Distribuição de  $x$  informa a probabilidade “*acumulada até  $x$* ”



$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in S$$

- ▶ V. Discreta: sequência *ordenada* (crescente) de  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ :

$$F(x_n) = \sum_{i=0}^n P(X = x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i), \quad x_i \in S$$

## Propriedades da Função de Distribuição

### Propriedades

- ▶ Valores no intervalo  $[0, 1]$ :

$$0 \leq F(x) \leq 1 \text{ para } x \in S.$$

- ▶ Função monotonicamente *crescente*:

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2) \leq F(x_3)$$

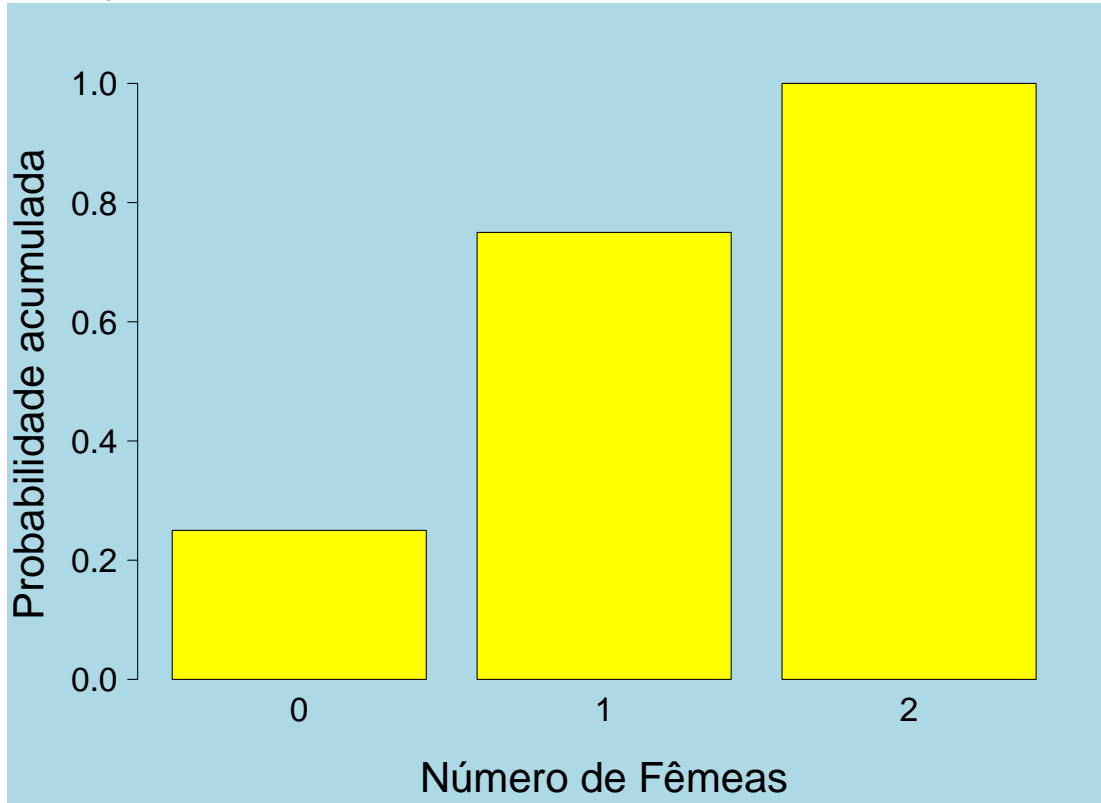
- ▶ Valor unitário para o maior valor no espaço amostral:

$$F(\max\{x \in S\}) = 1$$



## Gráfico da Função de *Distribuição*

Exemplo da Ninhada



## Esperança e Variância

### Momentos

Há duas propriedades das distribuições de probabilidade que são importantes na inferência estatística:

- ▶ Esperança ou Valor Esperado
- ▶ Variância

### Esperança

- ▶ A esperança pode ser interpretada como o “*valor médio*” da variável.
- ▶ Variável discreta  $X$ :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in S} x f(x) = \sum_{x \in S} x P(X = x)$$

# Esperança e Variância

## Variância

- ▶ A variância pode ser interpretada como a dispersão dos valores ao redor da esperança.
- ▶ Variável discreta  $X$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[X] &= \sum_{x \in S} (x - \mathbf{E}[X])^2 f(x) \\ &= \sum_{x \in S} (x - \mathbf{E}[X])^2 P(X = x) \\ &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2\end{aligned}$$

## Exemplo da Ninhada: Número de Fêmeas

### Esperança

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{x=0}^2 x f(x) \\ &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} \\ &= 1,0\end{aligned}$$

## Exemplo da Ninhada: Número de Fêmeas

### Variância

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[X] &= \sum_{x=0}^2 (x - \mathbf{E}[X])^2 f(x) \\ &= (0 - 1)^2 \times \frac{1}{4} \\ &+ (1 - 1)^2 \times \frac{1}{2} \\ &+ (2 - 1)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 0,50\end{aligned}$$

## Esperança de distribuições × média amostral

### Esperança

- ▶ A esperança ou valor esperado é uma propriedade de **distribuições de probabilidade**
- ▶ É deduzida das expressões das distribuições e da definição matemática de esperança
- ▶ É única para cada distribuição de probabilidade

### Média amostral

- ▶ É uma quantidade calculada de uma amostra de uma distribuição de probabilidades
- ▶ Varia a cada amostragem feita
- ▶ Se a amostra é representativa, a média amostral **estima** o valor esperado

## Esperança × média amostral: Exemplo

### Recapitulando exemplo ninhadas

$$f(0) = 0,25 \rightarrow 0 \times f(0) = 0$$

$$f(1) = 0,50 \rightarrow 1 \times f(1) = 0,50$$

$$f(2) = 0,25 \rightarrow 2 \times f(2) = 0,50$$

---

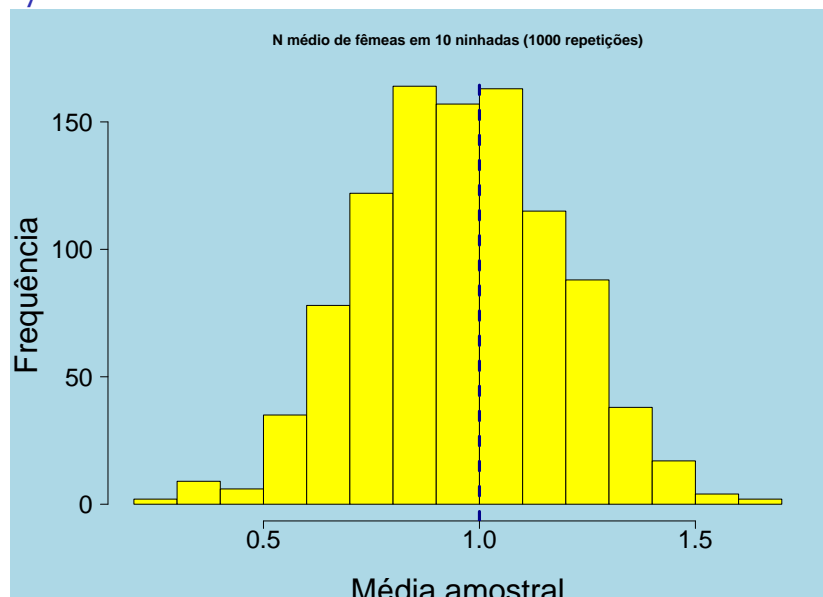
$$\mathbf{E}[X] = \sum x f(x) = 1$$

## Esperança × média amostral: Exemplo

### Simulação

- ▶ Amostras de 10 ninhadas de *C. jacchus*
- ▶ Cálculo da média de fêmeas por ninhada de cada amostra
- ▶ Repete o procedimento 1000 vezes

### Distribuição das médias amostrais



## Resumo

- ▶ Distribuições de Probabilidade são *funções* que associam os valores de uma variável quantitativa com probabilidades.
- ▶ As variáveis quantitativas podem ser de dois tipos:
  - ▶ discretas
  - ▶ contínuas
- ▶ Uma mesma distribuição de probabilidade pode ser definida por duas funções:
  - ▶ Função de Densidade
  - ▶ Função de Distribuição (acumulada)

## Resumo (cont.)

- ▶ Esperança e variância das distribuições:
  - ▶ são propriedades das distribuições de probabilidade
  - ▶ não são o mesmo que média e variância amostral
  - ▶ podem ser estimadas pela média e variância amostral